XVIII Congreso Dr. Antonio Monteiro

El Teorema de Paso de la Montaña y sus aplicaciones.

Analía Silva (UNSL-IMASL)

Agosto 2025

Índice general

Agradecimientos

Quiero agradecer profundamente al Comité Científico por la invitación y al Comité Organizador y a la Universidad Nacional del Sur por su hospitalidad.

Resumen

Consideramos el siguiente problema de Dirichlet:

$$\begin{cases} -\Delta u = |u|^{q-1}u & \text{en } \Omega, \\ u = 0 & \text{en } \partial\Omega, \end{cases}$$

donde $\Delta u = \operatorname{div}(\nabla u)$ es el operador de Laplace. Una herramienta clásica para abordar este tipo de ecuaciones es el **Cálculo de Variaciones**, que permite relacionar soluciones del problema con puntos críticos de ciertos funcionales definidos sobre espacios adecuados.

En particular, para algunos q las soluciones buscadas corresponden a **puntos silla** del funcional asociado. En este contexto, el **Teorema del Paso de la Montaña**, formulado por *Ambrosetti y Rabinowitz* en 1973, constituye una herramienta fundamental para garantizar la existencia de tales puntos críticos. Su nombre proviene de la forma geométrica típica de los funcionales a los que se aplica, que recuerda al perfil de un paisaje montañoso.

Este apunte fue escrito para un curso de estudiantes dictado en el XVIII Congreso Dr. Antonio Monteiro donde se propuso estudiar en detalle el Teorema de Paso de la Montaña y explorar sus aplicaciones a distintas ecuaciones diferenciales. Estas notas se basan principalmente en el libro de Evans [**1**].

Capítulo 1

Motivación

1. Introducción

Sea $x = (x_1, x_2, \cdots, x_n) \in \mathbb{R}^n$ y $u : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$. Denotamos sus derivadas parciales de la siguiente manera $\partial_i u = \frac{\partial u}{\partial x_i}$ o $\partial_{i,j} u = \frac{\partial^2 u}{\partial x_i \partial x_j}$. Luego,

DEFINICIÓN 1.1. *Una ecuación diferencial en derivadas parciales es de la forma:*

$$F(x_1, x_2, \cdots, x_n, u, \partial_1 u, \partial_2 u, \cdots, \partial_1^2 u, \cdot) = 0$$

donde u es la incógnita.

Denotando el $\nabla u = (\partial_1 u, \partial_2 u, \cdots, \partial_n u)$. Sea $\mathbf{F} = (F_1(x), \cdots, F_n(x))$ un campo vectorial C^1 sobre $\mathbb{R}^n$ entonces la divergencia de $\mathbf{F}$ es la función de definida por:

$$\operatorname{div} \mathbf{F} = \frac{\partial F_1}{\partial x_1} + \cdots + \frac{\partial F_n}{\partial x_n}.$$

Ahora, estamos en condiciones de definir Laplaciano como:

$$\Delta u = \operatorname{div}(\nabla u).$$

Este operador esta presente en muchas ecuaciones famosas:

- Ecuación de Laplace, $\triangle u = 0$ en Ω.
- Ecuación de Poisson, $\triangle u = f$ en Ω.
- Ecuación del Calor o difusión , $u_t - \triangle u = 0$ en $\Omega \times (0, \infty)$.
- Ecuación de Ondas, $u_{tt} - \triangle u = 0$ en $\Omega \times (0, \infty)$.

Para motivar el teorema objeto de este curso estudiaremos la siguiente ecuación:

$$\begin{cases} -\Delta u = |u|^{q-1} u \qquad \text{en} \qquad \Omega, \\ u = 0 \qquad \text{en} \qquad \partial\Omega. \end{cases} \tag{1.1}$$

Esta ecuación tiene condición de borde constante, este tipo de condiciones recibe el nombre de Dirichlet.

2. Preliminares

Recordemos el Teorema de Gauss de [**3**]

TEOREMA 1.2 (Teorema de la Divergencia (Gauss)). *Sea Ω una región sólida simple y S la superficie frontera de Ω, dada con orientación positiva (hacia afuera). Sea $\mathbf{F}$ un campo vectorial cuyas funciones componentes tienen derivadas parciales continuas ($C^1(\Omega)$) en una región abierta que contiene Ω. Entonces,*

$$\iint_S \mathbf{F}.\, d\mathbf{S} = \iiint_\Omega div\, \mathbf{F}\, dV.$$

Existe una versión más general en $\mathbb{R}^n$, que aplicada al campo $F = u \cdot e_i$ donde $u \in C^1(\Omega)$ dice lo siguiente:

Teorema 1.3. *Sea $u \in C^1(\Omega)$ y $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ abierto con borde suave. Entonces*

$$\int_{\partial\Omega} u \cdot \nu_i \, d\mathbf{S} = \int_\Omega u_{x_i} \, dx.$$

Observación 1.4. Para ver 1.3 usamos que $divF = u_{x_i} \qquad \text{y} \qquad F \cdot \nu = u \cdot e_i \cdot \nu = u \cdot \nu_i.$

Corolario 1.5. *Tomando uv en Teorema 1.3 obtenemos*

$$\begin{aligned}\int_{\partial\Omega} uv \cdot \nu_i \, d\mathbf{S} &= \int_\Omega (uv)_{x_i} \, dx \\ &= \int_\Omega u_{x_i} v \, dx + \int_\Omega u v_{x_i} \, dx.\end{aligned}$$

Corolario 1.6. *Tomando u y $v = v_{x_i}$ en el Corolario 1.5, para $u, v \in C^2(\bar{\Omega})$*

$$\int_\Omega u_{x_i} v_{x_i} \, dx = -\int_\Omega u v_{x_i x_i} \, dx + \int_{\partial\Omega} u v_{x_i} \cdot \nu_i \, d\mathbf{S}.$$

Sumando $i = 1, \cdots, n$

$$\sum_{i=1}^n \int_\Omega u_{x_i} v_{x_i} \, dx = \int_\Omega \nabla u \nabla v \, dx,$$

$$\sum_{i=1}^n \int_\Omega u v_{x_i x_i} \, dx = \int_\Omega u \Delta v \, dx,$$

$$\sum_{i=1}^n \int_{\partial\Omega} u v_{x_i} \cdot \nu_i \, d\mathbf{S} = \int_{\partial\Omega} u \frac{\partial v}{\partial \nu} \, d\mathbf{S}.$$

Juntando todo, obtenemos

$$\int_\Omega \nabla u \nabla v \, dx = -\int_\Omega u \Delta v dx + \int_{\partial\Omega} u \frac{\partial v}{\partial \nu} d\mathbf{S}. \tag{1.2}$$

Para finalizar la sección de preeliminares debemos recordar los Espacios de Lebesgue

$$L^p(\Omega) = \left\{ u \quad \text{una función medible:} \ \int_\Omega |u|^p \, dx < \infty \right\} \ 1 \le p < \infty.$$

Estos espacios estan equipados con las normas

$$\|u\|_{L^p(\Omega)} = \|u\|_p = \left(\int_\Omega |u|^p \, dx \right)^{\frac{1}{p}} \ \ 1 \le p < \infty.$$

Decimos que $u_n \to u$ en $L^p(\Omega)$ si $\|u_n - u\|_p \to 0$ cuando $n \to 0$. Estos espacios son de Banach. Para el caso particular cuando $p = 2$, podemos definir la norma a través de un producto interno $\|u\|_2 := \langle u, u \rangle^{\frac{1}{2}}$ donde

$$\langle u, v \rangle := \int_\Omega uv \, dx.$$

Luego, $L^2(\Omega)$ es un Espacio de Hilbert.
Una desigualdad muy conocida que será utilizada en este apunte es la Desigualdad de Hölder

Teorema 1.7 (Desigualdad de Hölder). *Si $1 \le p \le \infty$ y $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$ entonces*

$$\|fg\|_1 \le \|f\|_p \|g\|_q.$$

3. Espacios de Sobolev

Para desarrollar el tema de Espacios de Sobolev, nos guiaremos del libro de Evans [**1**].

Queremos definir un concepto de derivada que sea más débil, que sea "lo mínimo que necesitamos para que valga partes". Es decir queremos que para toda $v \in C_c^\infty(\Omega)$:

$$\int_\Omega \partial_i uv\, dx = -\int_\Omega u\partial_i v\, dx.$$

Nos interesa encontrar una ϕ tal que para toda $v \in C_c^\infty(\Omega)$ valga

$$\int_\Omega \partial_i uv\, dx = \int_\Omega \phi v\, dx.$$

Veamos que, si existe, la ϕ es única. Supongamos que hay 2, sean ϕ_1 y ϕ_2 tales que

$$\int_\Omega \phi_1 v\, dx = -\int_\Omega v_{x_i} u\, dx = \int_\Omega \phi_2 v\, dx.$$

Luego

$$\int_\Omega (\phi_1 - \phi_2)v\, dx = 0.$$

Usando el siguiente ejercicio:

Ejercicio 1.8. Sea Ω un dominio de $\mathbb{R}^n$.

Si $f \in L^1_{\text{loc}}(\Omega)$ y $\int_\Omega f\varphi\, dx = 0$ $\forall \varphi \in C_c^\infty(\Omega) \Rightarrow f = 0$ c.t.p.

Obtenemos que $\phi_1 = \phi_2$ y sabemos que la ϕ es única. Eso nos permite definir la derivada débil o derivada en sentido de las distribuciones:

Definición 1.9 (Derivada débil). *Sea $u \in L^1_{loc}(\Omega)$ decimos que u tiene derivada débil con respecto de x_i si existe $\phi \in L^1_{loc}(\Omega)$ tal que*

$$\int_\Omega uv_{x_i}\, dx = -\int_\Omega v\phi\, dx \quad \forall\, v \in C^1_c(\Omega).$$

Dicha ϕ es única y la notamos $\phi = u_{x_i}$.

Definición 1.10. *Una función $u \in L^1(\Omega)$ es una función de Sobolev si sus derivadas distribucionales $\partial_i u$ para $i = 1, \cdots, n$ se representan por una función $\phi_i \in L^1_{loc}(\Omega)$. Este espacio se llama $W^{1,1}_{loc}(\Omega)$.*

Definición 1.11. *Definimos el Espacio de Sobolev*

$$W^{1,2}(\Omega) = \{u \in W^{1,1}_{loc}(\Omega) : u, \partial_i u \in L^2(\Omega) \quad \forall i = 1, \cdots, n\}.$$

La norma de este espacio es:

$$\|u\|_{W^{1,2}(\Omega)} := \left(\int_\Omega |u|^2\, dx + \sum_{i=1}^n \int_\Omega |\partial_i u|^2\, dx \right)^{\frac{1}{2}}.$$

Esta norma viene por un producto interno, sean $u, v \in W^{1,2}(\Omega)$

$$(u, v) := \int_\Omega uv\, dx + \sum_{i=1}^n \partial_i u \partial_i v\, dx,$$

$$\|u\|_{W^{1,2}(\Omega)} := (u, u)^{\frac{1}{2}}.$$

Por lo cual es un Hilbert y lo denotamos como $H^1(\Omega)$.

Para nuestra aplicación será de vital importancia el siguiente subespacio:

DEFINICIÓN 1.12. *LLamamos* $W_0^{1,2}(\Omega)$ *a la clausura de las funciones* $C_c^\infty(\Omega)$ *en* $W^{1,2}(\Omega)$.

Este espacio admite la siguiente caracterización:

OBSERVACIÓN 1.13. Sea Ω acotado y $\partial\Omega \in C^1$. Suponemos $u \in W_0^{1,2}(\Omega)$. Entonces,

$$u \in W_0^{1,2}(\Omega) \text{ si y solo si } u = 0 \text{ en } \partial\Omega.$$

Un resultado muy útil es el siguiente:

TEOREMA 1.14 (Desigualdad de Poincaré). *Sea* $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ *un abierto y suponemos que existen constantes* $a, b \in \mathbb{R}, a < b$ *tales que* $\Omega \subset \{x = (x_1, x') \in \mathbb{R}^n : a < x_1 < b\}$. *Entonces existe una constante* C *que depende sólo de* $(b-a)$ *tal que*

$$\int_\Omega |f|^2\, dx \leq C \int_\Omega |\nabla f|^2\, dx$$

para toda $f \in W_0^{1,2}(\Omega)$.

La demostración de este teorema puede encontrarse en el libro de Evans [**1**].

OBSERVACIÓN 1.15. Usando Poincaré, obtenemos que $\|f\|_2 + \|\nabla f\|_2$ es equivalente a $\|\nabla f\|_2$ en $W_0^{1,2}(\Omega)$.

Para finalizar esta introducción a los Espacios de Sobolev, una pregunta natural que surge es la siguiente: ¿Si $u \in W^{1,2}(\Omega)$ podemos asegurar que automáticamente u pertenece a otro espacio?.
La respuesta es que si y está dada por el siguiente teorema

TEOREMA 1.16 (Teorema de inmersión de Sobolev). *Sea* Ω *Lipschitz, se tiene, que para toda* $f \in W^{1,2}(\Omega)$, *vale la desigualdad*

$$\|f\|_q \leq C(p, q, \Omega)\|f\|_{1,2},$$

para $1 \leq q \leq 2^* = \frac{2n}{n-2}$.
Mas aún, cuando $q < 2^*$ *la inclusión* $W^{1,2}(\Omega) \hookrightarrow L^q(\Omega)$ *resulta compacta. Es decir, que si tengo una sucesión acotada en* $W^{1,2}(\Omega)$ *puedo extraer una subsucesión que converge fuerte en* $L^q(\Omega)$.

La demostración de este resultado puede encontrarse en el libro de Evans.

4. Soluciones débiles

Volvamos a nuestro problema:

$$\begin{cases} -\Delta u = |u|^{q-1}u & \text{en} \quad \Omega \\ u = 0 & \text{en} \quad \partial\Omega. \end{cases} \tag{1.1}$$

Queremos buscar una solución de (1.1), así que multiplicamos la ecuación por $v \in C_c^\infty(\Omega)$ e integramos sobre Ω.

$$-\int_\Omega \Delta uv\, dx = \int_\Omega |u|^{q-1}uv\, dx.$$

Usando (1.2) y que v tiene soporte compacto, obtenemos:

$$\int_\Omega \nabla u \nabla v\, dx = \int_\Omega |u|^{q-1}uv\, dx.$$

DEFINICIÓN 1.17. *Decimos que* $u \in H_0^1(\Omega)$ *es la solución débil si verifica*

$$\int_\Omega \nabla u \nabla v \, dx = \int_\Omega |u|^{q-1} uv \, dx$$

para toda $v \in H_0^1(\Omega)$.

OBSERVACIÓN 1.18. Las soluciones débiles se convierten en soluciones clásicas si tenemos la regularidad necesaria. En efecto, si tenemos una solución débil

$$\int_\Omega \nabla u \nabla v \, dx = \int_\Omega |u|^{q-1} uv \, dx.$$

Usando nuevamente (1.2),

$$-\int_\Omega \Delta uv \, dx = \int_\Omega |u|^{q-1} uv \, dx$$

y por el Ejercicio 1.8 tenemos que

$$-\Delta u = |u|^{q-1} u \qquad \text{ctp en } \Omega.$$

Luego, si $u \in C^2(\Omega) \cap C^1(\bar{\Omega})$ entonces u es una solución clásica.

5. Cálculo de variaciones

Suponemos $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ un abierto acotado con borde regular. Definimos la siguiente función:

$$L : \mathbb{R}^n \times \mathbb{R} \times \overline{\Omega} \longrightarrow \mathbb{R}.$$

Llamaremos a L Lagrangiano.

Notaremos $L = L(p, z, x) = L(p_1, \cdots, p_n, z, x_1, \cdots, x_n)$. Donde p es el nombre de la variable que sera sustituida por $Dw(x)$ y z es la variable que sera sustituida por $w(x)$. Supongamos

$$\Phi[w] = \int_\Omega L(Dw(x), w(x), x) \, dx.$$

Para w una función regular que satisface la condición de borde $w = g$ en $\partial\Omega$.

Supongamos u un mínimo de Φ, queremos ver que ecuación diferencial verifica u. Dada $\varphi \in C_c^\infty(\Omega)$, definimos $i : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$, $i(t) = \Phi(u+t\varphi)$. Como u es mínimo sabemos que $i(u) \leq i(t) \quad \forall\, t$ luego $i'(0) = 0$. Por otro lado,

$$i(t) = \int_\Omega L(\nabla u + t\nabla\varphi, u + t\varphi, x) \, dx.$$

Derivando, nos queda

$$i'(t) = \int_\Omega \sum_{i=1}^n L_{p_i}(\nabla u + t\nabla v, u + tv, x) v_{x_i} + L_z(\nabla u + t\nabla v, u + tv, x) v \, dx.$$

Reemplazando $t = 0$

$$0 = i'(0) = \int_\Omega \sum_{i=1}^n L_{p_i}(\nabla u, u, x) v_{x_i} + L_z(\nabla u, u, x) v \, dx.$$

Como v tiene soporte compacto podemos usar partes y obtenemos

$$0 = \int_\Omega \left(-\sum_{i=1}^n (L_{p_i}(\nabla u, u, x))_{x_i} + L_z(\nabla u, u, x) \right) v \, dx.$$

Como vale para toda función test, obtenemos la siguiente ecuación

$$-\sum_{i=1}^{n}(L_{p_i}(\nabla u,u,x))_{x_i}+L_z(\nabla u,u,x)=0 \text{ en } \Omega.$$

Esta es la Ecuación de Euler Lagrange.

OBSERVACIÓN 1.19. Sea $L(p,z,x)=\frac{|p|^2}{2}-\frac{|z|^{q+1}}{q+1}$. Definimos el siguiente funcional:

$$\Phi(u)=\frac{1}{2}\int_\Omega |\nabla u|^2\,dx-\int_\Omega \frac{|u|^{q+1}}{q+1}\,dx.$$

Queremos que nuestro funcional este definido de $W_0^{1,2}(\Omega)$ en $\mathbb{R}$, para eso necesitamos que $q+1\leq 2^*=\frac{2n}{n-2}$, es decir, $q\leq\frac{n+2}{n-2}$. Su Ecuación de Euler-Lagrange es $-\Delta u=|u|^{q-1}u$ en Ω.

¿Cuando podemos garantizar que el funcional

$$\Phi[w]=\int_\Omega L(Dw(x),w(x),x)\,dx$$

posee un mínimo?

La respuesta la obtenemos del siguiente teorema. Para entenderlo es necesario introducir algunas definiciones:

DEFINICIÓN 1.20. *Decimos que Φ es coersivo si $\Phi(u)\to\infty$ cuando $\|u\|\to\infty$.*

DEFINICIÓN 1.21. *Decimos que $\{u_k\}\subset X$ converge débil a $u\in X$ y lo notamos $u_k\rightharpoonup u$, si*

$$\langle v,u_k\rangle\to\langle v,u\rangle$$

para todo $v\in X'$.

OBSERVACIÓN 1.22. Ejemplo En $X=L^2(\Omega)$

$$\int_\Omega u_k v\,dx\to\int_\Omega uv\,dx \qquad \text{para todo} \qquad v\in L^2(\Omega).$$

Ahora si, estamos en condiciones de enunciar el teorema.

TEOREMA 1.23. *Sea E espacio de Banach reflexivo, $\Phi:E\longrightarrow\mathbb{R}$ coerciva y acotada inferiormente, si Φ es secuencialmente semicontinua inferiormente para la topología débil, es decir, si $u_k\rightharpoonup u_0$ entonces $\Phi(u_0)\leq\liminf\Phi(u_k)$. Entonces existe $u_0\in E$ tal que $\Phi(u_0)\leq\Phi(u)\quad\forall\,u$.*

La demostración de este resultado y sus aplicaciones puede encontrarse en el libro de Evans.

No todas las ecuaciones pueden resolverse encontrando mínimos del funcional. Volvamos a nuestro ejemplo (1.1). El funcional asociado se puede acotar inferiormente como:

$$\Phi(u)\geq\frac{1}{2}\int_\Omega|\nabla u|^2\,dx-\frac{1}{q+1}\int_\Omega|u|^{q+1}\,dx.$$

Fijamos $u_0\in W_0^{1,2}(\Omega)$

$$\Phi(tu_0)=\frac{t^2}{2}\int_\Omega|\nabla u_0|^2\,dx-\frac{t^{q+1}}{q+1}\int_\Omega|u_0|^{q+1}\,dx.$$

Si notamos $C_1=\int_\Omega|\nabla u_0|^2\,dx$ y $C_2=\int_\Omega|u_0|^{q+1}\,dx$. Nos queda que

$$\Phi(tu_0)=\frac{C_1}{2}t^2-\frac{C_2}{q+1}t^{q+1}.$$

Esto nos dice que si $q+1>2$ el funcional Φ no esta acotado inferiormente.

Capítulo 2

El Teorema de paso de la montaña

En este capítulo revisaremos el ya clásico Teorema del paso de la montaña. Veamos ahora unas definiciones previas para poder enunciar el teorema

Definición 2.1. *Decimos que Φ es diferenciable en u si existe $v \in E$ tal que*

$$\Phi(w) = \Phi(u) + (v, w-u) + O(\|v-w\|) \quad \forall\, w.$$

Donde $(v, w-u)$ es el producto de dualidad. Notemos $v = \Phi'(u)$

Definición 2.2. *Decimos que $u \in E$ es un punto crítico si $\Phi'(u) = 0$.*

Consideramos los siguientes conjuntos:

$$A_c = \{u \in E : \Phi(u) \leq c\}.$$

$$K_c = \{u \in E : \Phi(u) = c \text{ y } \Phi'(u) = 0\}.$$

Definición 2.3. *$c \in \mathbb{R}$ es un valor crítico si $K_c \neq \emptyset$.*

Definición 2.4. *Decimos que el funcional $\Phi \in C^1$ satisface la condición de Palais Smale (PS). Si para cada $\{u_k\} \subset W_0^{1,2}(\Omega)$ tal que:*

1. $|\Phi(u_k)| \leq c \quad \forall\, k$.
2. $\Phi'(u_k) \longrightarrow 0$.

Podemos extraer una subsucesión convergente.

1. El Teorema de paso de la montaña

Teorema 2.5 (Teorema de paso de la montaña). *Sea $\Phi \in C^1$ que satisface (PS) tal que:*

1. $\Phi(0) = 0$.
2. *Existen $r, a > 0$ tales que $\Phi(u) \geq a$ para $\|u\| = r$.*
3. *Existe $v \in H$ con $\|v\| > r$ tal que $\Phi(v) \leq 0$.*

Entonces

$$c = \inf_{g \in \Gamma} \max_{0 \leq t \leq 1} \Phi(g(t)),$$

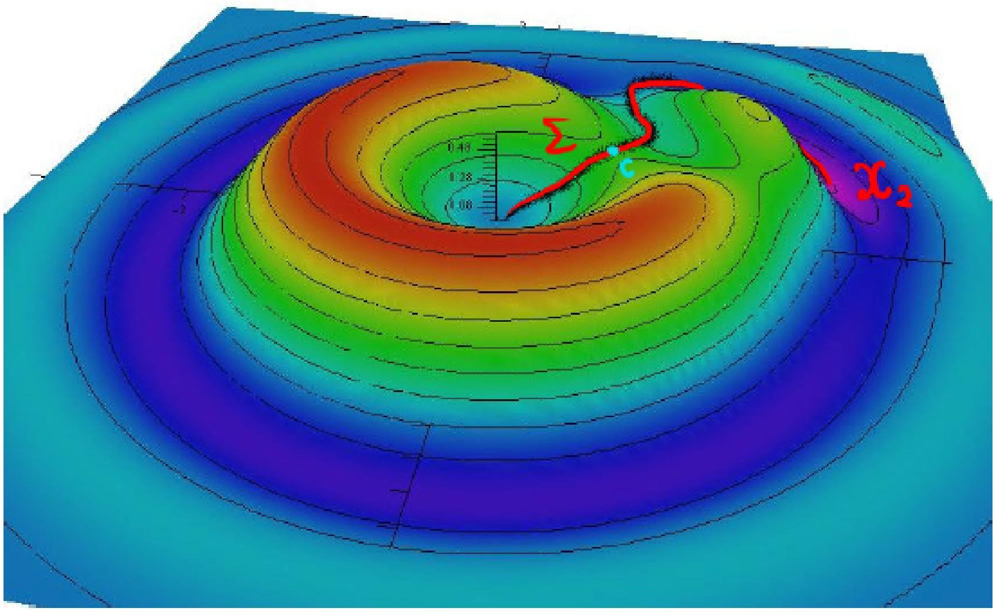
es un valor crítico

Donde $\Gamma = \{g : [0,1] \longrightarrow H \text{ continua, tal que } \quad g(0) = 0 \quad g(1) = v\}$.

Observación 2.6. Pensemos en el gráfico de $\Phi(\cdot)$ como un paisaje. Supongamos, que estamos parados en el fondo de un valle ubicado en el 0 y hay un anillo de montañas que nos rodea. Más allá del mismo, hay otro valle y ahí está la ubicación v a la que queremos llegar. ¿Qué camino nos conviene elegir?.

Respuesta: Elegimos, entre todos los pasos de la montaña posibles, aquél que sea el más bajo de todos.

Para ejemplificar la geometría que tiene el funcional que verifica las hipótesis del teorema veamos la siguiente ilustración que aparece en [**2**].



Acá el color representa la altura de la montaña. El pico más alto está representado por el color rojo y el punto más bajo es de color violeta. La curva roja representa el camino uniendo el cero con v y c resulta ser el punto crítico que encuentra el teorema que no es otra cosa que un punto silla.

Para demostrar el Teorema de Paso de la montaña necesitamos el siguiente lema

Lema 2.7 (Lema de deformación). *Suponemos $\Phi \in C^1$ que satisface (PS). Además $K_c = \emptyset$. Entonces para cada $\varepsilon > 0$, existe una constante $0 < \delta < \varepsilon$ y una función $\eta \in C([0,1] \times H, H)$ tal que $\eta_t(u) = \eta(t,u) \qquad (0 \le t \le 1, u \in H)$ satisface:*

1. $\eta_0(u) = u \qquad (u \in H)$.
2. $\eta_1(u) = u \qquad (u \notin \Phi^{-1}[c-\varepsilon, c+\varepsilon])$.
3. $\Phi(\eta_t(u)) \le \Phi(u) \qquad (u \in H, 0 \le t \le 1)$.
4. $\eta_1(A_{c+\delta}) \subset A_{c-\delta}$.

Demostración. Vamos a separar la prueba en varios pasos:
Paso 1: Existen $0 < \sigma, \varepsilon < 1$ tales que:

$$\|\Phi'(u)\| \ge \sigma \qquad u \in A_{c+\varepsilon} \setminus A_{c-\varepsilon}. \tag{2.2}$$

En efecto, suponemos que no, es decir que existen $\sigma_k \to 0$, $\varepsilon_k \to 0$ tales que

$$u_k \in A_{c+\varepsilon_k} \setminus A_{c-\varepsilon_k} \quad \text{y} \quad \|\Phi'(u_k)\| \le \sigma_k.$$

Entonces u_k es una sucesión de Palais Smale y como el funcional satisface (PS) tenemos que $u_{kj} \to u$. Por continuidad del funcional $\Phi(u) = c$ y $\Phi'(u) = 0$. Entonces $K_c \neq \emptyset$. Absurdo!!! Luego, vale (2.2).

Paso 2: Construcción del potencial
Sea

$$0 < \delta < \varepsilon \qquad \text{y} \qquad 0 < \delta < \frac{\sigma^2}{2}$$

y definimos los conjuntos

$$A := \{u \in H \colon \Phi(u) \leq c - \varepsilon \text{ o } \Phi(u) \geq c + \varepsilon\}.$$

$$B := \{u \in H \colon c - \delta \leq \Phi(u) \leq c + \delta\}.$$

Nos construimos la función g

$$g(u) = \frac{\operatorname{dist}(u, A)}{\operatorname{dist}(u, A) + \operatorname{dist}(u, B)}.$$

Se puede ver que $0 \leq g \leq 1$; $g = 0$ en A; $g = 1$ en B.
Definimos

$$h(t) := \begin{cases} 1 & 0 \leq t \leq 1 \\ \frac{1}{t} & t \geq 1. \end{cases}$$

Luego, juntando todo construimos el potencial:

$$V(u) := -g(u)h(\|\Phi'(u)\|)\Phi'(u).$$

Paso 3: Construcción de η
Usando V como potencial, nos construimos la siguiente ecuación:

$$\begin{cases} \frac{d\eta}{dt} = V(\eta(t)) \quad (t > 0), \\ \eta(0) = u. \end{cases} \tag{2.3}$$

Donde

$$\eta = \eta(t, u) = \eta_t(u).$$

Entonces η es C^1, $\eta(0) = u$, eso prueba el item 1.
Veamos el item 2, si $u \notin \Phi^{-1}[c - \varepsilon, c + \varepsilon]$ entonces $u \in A$ y luego $g(u) = 0$ y $V(u) = 0$. Notemos entonces que $\eta_t(u) = u$ es solución de (2.3). En particular, para $t = 1$ vale que $\eta_1(u) = u$ y el item 2 queda demostrado.
Paso 4 : Prueba del item 3.
Calculamos de la derivada de η

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt}\Phi(\eta_t(u)) &= \left(\Phi'(\eta_t(u)), \frac{d\eta_t(u)}{dt}\right) \\ &= (\Phi'(\eta_t(u)), V(\eta_t(u))) \\ &= -g(\eta_t(u))h(\|\Phi'(\eta_t(u))\|)\|\Phi'(\eta_t(u))\|^2. \end{aligned}$$

Luego $\frac{d}{dt}\Phi(\eta_t(u)) \leq 0$ y esto nos dice que η es decreciente en t y en particular $\Phi(\eta_t(u)) \leq \Phi(u)$ para $(u \in H, 0 \leq t \leq 1)$. Esto prueba el item 3.
Paso 5: Veamos el item 4
Sea $u \in A_{c+\delta}$.
Si $\eta_t(u) \notin B$ para algún $0 \leq t \leq 1$ entonces listo. En efecto, pues si $\Phi(\eta_t(u)) < c - \delta$ entonces $\Phi(\eta_1(u)) < c - \delta$. El caso $\Phi(\eta_t(u)) > c + \delta$ es absurdo ya que $\Phi(\eta_t(u)) \leq \Phi(u) \leq c + \delta$.
Luego, sólo hay que analizar el caso $\eta_t(u) \in B$, entonces $g(\eta_t(u)) = 1$. Además,

$$\frac{d}{dt}\Phi(\eta_t(u)) = -h(\|\Phi'(\eta_t(u))\|)\|\Phi'(\eta_t(u))\|^2.$$

Si $\|\Phi'(\eta_t(u))\| \geq 1$ entonces $\frac{d}{dt}\Phi(\eta_t(u)) \leq -\sigma$.
Si $\|\Phi'(\eta_t(u))\| \leq 1$ entonces $\frac{d}{dt}\Phi(\eta_t(u)) \leq -\sigma^2$.
Integrando la derivada entre 0 y 1, obtenemos

$$\Phi(\eta_t(u)) \leq \Phi(u) - \sigma^2 \leq c + \delta - \sigma^2 \leq c - \delta.$$

Esto finaliza la prueba del item 4. □

Ahora, estamos en condiciones de probar el Teorema de Paso de la Montaña.

Demostración. Tomo t_0 con $\|g(t_0)\| = r$, entonces $\Phi(g(t_0)) \geq a$. Luego $c \geq a$.
Supongo $K_c = \emptyset$, $0 < \varepsilon < \frac{a}{2}$
Por el Lema de deformación, existen $0 < \delta < \varepsilon$ y η tales que:

1. $\eta(A_{c+\delta}) \subset A_{c-\delta}$.
2. $\eta_1(u) = u \qquad si\, u \notin \Phi^{-1}[c-\varepsilon, c+\varepsilon]$.
3. $\eta_0(u) = u$.

Tomamos $g \in \Gamma$ tal que

$$\max_{0<t<1} \Phi(g(t)) \leq c + \delta.$$

Definimos $\bar{g} = \eta \circ g$ está en $\Gamma = \{g : [0,1] \longrightarrow H \text{ continua} \quad g(0) = 0 \quad g(1) = v\}$ pues:
$\eta(g(0)) = \eta(0) = 0$.
$\eta(g(1)) = \eta(v) = v$ pues $\Phi(v) < 0$. Usando que 1, tenemos que:

$$\max_{0<t<1} \Phi(\bar{g}(t)) \leq c - \delta.$$

Por otro lado, por la definición de c

$$c = \inf_{g\in\Gamma} \max_{0\leq t\leq 1} \Phi(g(t)) \leq \max_{0<t<1} \Phi(\bar{g}(t)) \leq c - \delta.$$

Absurdo!!!
Luego K_c es no vacio. □

2. Una aplicación

Volvamos a nuestra aplicación:

$$\begin{cases} -\Delta u = |u|^{q-1}u & \text{en} \quad \Omega, \\ u = 0 & \text{en} \quad \partial\Omega. \end{cases} \tag{2.4}$$

Recordemos que estamos considerando $W_0^{1,2}(\Omega)$ y su norma es $\|u\| = \left(\int_\Omega |\nabla u|^2\, dx\right)^{\frac{1}{2}}$. Queda definido entonces el siguiente funcional,

$$\Phi(u) = \frac{1}{2}\int_\Omega |\nabla u|^2\, dx - \frac{1}{q+1}\int_\Omega |u|^{q+1}\, dx.$$

Queremos que nuestro funcional este definido de $W_0^{1,2}$ en $\mathbb{R}$, para eso necesitamos que $q+1 \leq 2^* = \frac{2n}{n-2}$, es decir, $q \leq \frac{n+2}{n-2}$.

Sea

$$J(u) = \frac{1}{2}\int_\Omega |\nabla u|^2\, dx$$

y $\mathfrak{F}(u) = \frac{1}{q+1}\int_\Omega |u|^{q+1}\, dx$. Podemos reescribir Φ como

$$\Phi(u) = J(u) - \mathfrak{F}(u).$$

Observemos que

$$\mathfrak{F}(u+v) = \mathfrak{F}(u) + \int_\Omega |u|^{q-1}uv\,dx + q\int_\Omega\int_0^1 (1-s)|u+sv|^{q-1}\,ds\,|v|^2\,dx.$$

Por otro lado, notamos que

$$\begin{aligned}\left|q\int_\Omega\int_0^1 (1-s)|u+sv|^{q-1}\,ds\,|v|^2\,dx\right| &\le C\int_\Omega (|u|^{q-1}+|v|^{q-1})|v|^2\,dx\\ &= C\left(\int_\Omega |u|^{q-1}|v|^2\,dx + \int_\Omega |v|^{q+1}\,dx\right).\end{aligned}$$

Además, usando 1.7 y 1.14,

$$\begin{aligned}\int_\Omega |u|^{q-1}|v|^2\,dx &\le \left(\int_\Omega |u|^{q+1}\,dx\right)^{\frac{q-1}{q+1}}\left(\int_\Omega |v|^{q+1}\,dx\right)^{\frac{2}{q+1}}\\ &= \|u\|^{q-1}_{L^{q+1}(\Omega)}\|v\|^2_{L^{q+1}(\Omega)} \le \|u\|^{q-1}_{L^{q+1}(\Omega)}\|v\|^2_{W_0^{1,2}(\Omega)}\\ &= o(\|v\|_{W_0^{1,2}(\Omega)}).\end{aligned}$$

Resumiendo, tenemos que

$$(\mathfrak{F}'(u),v) = \int_\Omega |u|^{q-1}uv\,dx.$$

Veamos que $\mathfrak{F}'$ es Lipschitz

$$\|\mathfrak{F}'(u_1)-\mathfrak{F}'(u_2)\|_{W_0^{1,2}(\Omega)} = \sup_{v\in W_0^{1,2}(\Omega)\,;\,\|v\|=1} |(\mathfrak{F}'(u_1)-\mathfrak{F}'(u_2),v)|.$$

Además,

$$\begin{aligned}(\mathfrak{F}'(u_1)-\mathfrak{F}'(u_2),v) = (\mathfrak{F}'(u_1),v)-(\mathfrak{F}'(u_2),v) &= \int_\Omega |u_1|^{q-1}u_1v\,dx - \int_\Omega |u_2|^{q-2}u_2v\,dx\\ &\le \int_\Omega C|\zeta|^{q-1}(u_1-u_2)v\,dx\\ &\le \int_\Omega C(|u_1|^{q-1}+|u_2|^{q-1})(u_1-u_2)v\,dx.\end{aligned}$$

Acotemos usando 1.7,

$$\begin{aligned}&\int_\Omega C(|u_1|^{q-1}+|u_2|^{q-1})(u_1-u_2)v\,dx\\ &\le \|v\|_{L^{2^*}(\Omega)}\left(\int_\Omega (|u_1|^{q-1}+|u_2|^{q-1})^{\frac{n2}{n+2}}|u_1-u_2|^{\frac{n2}{n+2}}\,dx\right)^{\frac{n+2}{n2}}\\ &\le C\left(\int_\Omega (|u_1|^{q-1}+|u_2|^{q-1})^{\frac{n}{2}}\,dx\right)^{\frac{2}{n}}\left(\int_\Omega |u_1-u_2|^{2^*}\,dx\right)^{\frac{1}{2^*}}.\end{aligned}$$

Podemos concluir entonces que

$$\|\mathfrak{F}'(u_1)-\mathfrak{F}'(u_2)\|_{W_0^{1,2}(\Omega)} \le C\|u_1-u_2\|_{W_0^{1,2}(\Omega)}.$$

También se puede probar que

$$(J'(u),v) = \int_\Omega \nabla u\nabla v\,dx.$$

Luego, con la misma idea de antes obtenemos:

$$\|J'(u_1)-J'(u_2)\|_{W_0^{1,2}(\Omega)} \le C\|u_1-u_2\|_{W_0^{1,2}(\Omega)}.$$

Finalmente, usando que $\Phi'(u) = J'(u) - \mathfrak{F}'(u)$. Tenemos que

$$\|\Phi'(u_1) - \Phi'(u_2)\|_{W_0^{1,2}(\Omega)} \leq C\|u_1 - u_2\|_{W_0^{1,2}(\Omega)}.$$

Acabamos de probar que el funcional es continuo.

Verifiquemos que Φ satisface (P-S).

Sea $\{u_k\} \subset W_0^{1,2}(\Omega)$ tal que:

1. $|\Phi(u_k)| \leq c \quad \forall\, k$.
2. $\Phi'(u_k) \longrightarrow 0$.

Queremos ver que tiene una subsucesión convergente.

Dado $\varepsilon > 0$ existe un k_0 tal que $\|\Phi'(u_k)\| < \varepsilon \quad \forall\, k \geq k_0$. Como $\|\Phi'(u_k)\| = \sup_{v\neq 0} \frac{(\Phi'(u_k),v)}{\|v\|}$. Esto nos dice que, $|(\Phi'(u_k), v)| \leq \varepsilon\|v\|$. Entonces

$$\left|\int_\Omega \nabla u_k \nabla v\, dx - \int_\Omega |u_k|^{q-1} u_k v\, dx\right| \leq \varepsilon\|v\| \quad \forall\, v.$$

Elegimos $v = u_k$, nos queda

$$\left|\int_\Omega |\nabla u_k|^2\, dx - \int_\Omega |u_k|^{q+1}\, dx\right| \leq \varepsilon\|u_k\|.$$

Como $\Phi(u_k) = \int_\Omega \frac{1}{2}|\nabla u_k|^2 - \frac{1}{q+1}|u_k|^{q+1}\, dx \leq C$.

Multiplicando la ecuación por $q+1$ nos queda

$$\int_\Omega \frac{q+1}{2}|\nabla u_k|^2 - |u_k|^{q+1}\, dx \leq C.$$

Sumando la dos ecuaciones, tenemos que

$$\int_\Omega (\frac{q+1}{2} - 1)|\nabla u_k|^2\, dx \leq C + \varepsilon\|u_k\|.$$

Eligiendo $\varepsilon = 1$ tenemos que

$$\int_\Omega (\frac{q+1}{2} - 1)|\nabla u_k|^2\, dx \leq C + \|u_k\|.$$

Es decir,

$$C\|u_k\|^2 \leq c + \|u_k\|.$$

Acabamos de probar que $\{u_k\}$ es acotada en $W_0^{1,2}(\Omega)$. Entonces existe $u \in W_0^{1,2}(\Omega)$ tal que $u_k \rightharpoonup u$, gracias a 1.16 podemos afirmar que $u_k \longrightarrow u$ en $L^{q+1}(\Omega)$. Tenemos que $|u_k|^{q-1}u_k \longrightarrow |u|^{q-1}u$ en $L^{\frac{q+1}{q}}$.

Sea $w = \mathfrak{F}'(u)$, veamos que $\mathfrak{F}'(u_k) \longrightarrow w$.

$$\begin{aligned}\|\mathfrak{F}'(u_k) - \mathfrak{F}'(u)\|^2 = (\mathfrak{F}'(u_k) - \mathfrak{F}'(u), w_k - w) &= \int_\Omega (|u_k|^{q-1}u_k - |u|^{q-1}u)(w_k - w)\, dx \\ &\leq \left(\int_\Omega (|u_k|^{q-1}u_k - |u|^{q-1}u)^{\frac{q+1}{q}}\, dx\right)^{\frac{q}{q+1}} \left(\int_\Omega |w_k - w|^{q+1}\, dx\right)^{\frac{1}{q+1}}\end{aligned}$$

Además

$$\|w_k - w\|_{L^{q+1}(\Omega)} \leq \|w_k - w\|_{W_0^{1,2}(\Omega)} = \|\mathfrak{F}'(u_k) - \mathfrak{F}'(u)\|_{W_0^{1,2}(\Omega)}$$

Simplificando la norma a ambos lados de la desigualdad, nos queda que

$$\|\mathfrak{F}'(u_k) - \mathfrak{F}'(u)\| \leq \||u_k|^{q-1}u_k - |u|^{q-1}u\|_{L^{\frac{q+1}{q}}(\Omega)} \longrightarrow 0$$

Ahora, como $\Phi'(u_k) = J'(u_k) - \mathfrak{F}'(u_k)$, usando que $\mathfrak{F}'(u_k)$ y $\Phi'(u_k)$ son convergentes. Luego, existe un α tal que $J'(u_k) \to \alpha$. Como $J'(u_k) \rightharpoonup J'(u)$ entonces $J'(u) = \alpha$ y $J'(u_k) \to J'(u)$. Además,

$$|(J'(u_k) - J'(u), u_k - u)| \leq \|J'(u_k) - J'(u)\| \|u_k - u\| \to 0$$

Recordando

$$(J'(u_k) - J'(u), u_k - u) = \int_\Omega |\nabla u_k - \nabla u|^2 \, dx,$$

Concluimos que $\{u_k\}$ es convergente en $H_0^1(\Omega)$.
Veamos que Φ satisface las hipótesis geométricas del teorema.

Que $\Phi(0) = 0$ es claro.
Si $\|u\|_{W_0^{1,2}(\Omega)} = r$ entonces $\Phi(u) = \frac{1}{2}r^2 - \int_\Omega \frac{1}{q+1}|u|^{q+1}\,dx$. Por otro lado,

$$\int_\Omega \frac{1}{q+1}|u|^{q+1}\,dx \leq C\left(\int_\Omega |\nabla u|^2\,dx\right)^{\frac{q+1}{2}} = Cr^{q+1}.$$

Reemplazando, nos queda que

$$\Phi(u) \geq \frac{1}{2}r^2 - Cr^{q+1} = r^2(\frac{1}{2} - Cr^{q+1-2}).$$

Si elegimos, por ejemplo r tal que $\frac{1}{4} = \frac{1}{2} - Cr^{q-1}$, despejando resulta que $r = (\frac{1}{4\,C})^{\frac{1}{q-1}}$ y para este r se verifica que $\Phi(u) \geq (\frac{1}{4\,C})^{\frac{2}{q-1}}\frac{1}{4}$. Si definimos $a = (\frac{1}{4\,C})^{\frac{2}{q-1}}\frac{1}{4}$ nos construimos a y r que satisfacen lo pedido.

Sea $u_0 \in W_0^{1,2}(\Omega)$ tal que $\|u_0\|_{W_0^{1,2}(\Omega)}$. Entonces

$$\begin{aligned}\Phi(tu_0) &\leq \frac{t^2}{2}\int_\Omega |\nabla u_0|^2\,dx - \frac{t^{q+1}}{q+1}\int_\Omega |u_0|^{q+1}\,dx \\ &\leq \frac{t^2}{2} - C\,t^{q+1} = t^2\left(\frac{1}{2} - C\,t^{q+1-2}\right).\end{aligned}$$

Si elegimos $t > 0$ y $(\frac{1}{2} - C\,t^{q-1}) < 0$ despejando t nos queda que $t > (\frac{1}{2\,C})^{\frac{1}{q-1}}$. Resumiendo, vimos que si $\|u\| = t$ con $t > (\frac{1}{2\,C})^{\frac{1}{q-1}}$ entonces $\Phi(u) < 0$.

Acabamos de verificar que el funcional satisface las hipótesis del Teorema de paso de la montaña. Concluimos, entonces que c es un valor crítico.

Bibliografía

[1] L. Evans.*Partial Differential Equations*. Graduate Studies in Mathematics. Volume 19.1998

[2] H. Ghaderi. *Mountain Pass Theorems with Ekeland?s Variational Principle and an Application to the Semilinear Dirichlet Problem*. Bachelor thesis-Department of Mathematics, Uppsala University, Uppsala, Sweden, 2011.

[3] J. Marsden y A. Tromba. *Cálculo vectorial*. IV edición. Addison Wesley Longman. 1998